【 補足解説１ 】 「 Levinson-Durbin のアルゴリズム 」

時系列予測のための自己回帰 (Autoregressive) モデルにおいて，そのパラメータ (AR 係数と予測誤差の分散) を，取得した標本時系列 (それから推定された自己共分散関数) から求める方法について述べる。すなわち，自己共分散関数が満足する Yule-Walker 方程式を高速に解く Levinson-Durbin のアルゴリズムについて解説する。

＜ Yule-Walker 方程式 ＞

ある時系列 $x(s)$ が，次数 M の AR 過程で表現できるとき，

$$x(s) = \sum_{m=1}^{M} a(m)x(s-m) + \varepsilon(s) \tag{1}$$

その時系列の自己共分散関数 $R_{xx}(k)$ は，次式を満足する。ここで，σ^2 は予測誤差 $\varepsilon(s)$ の分散である。

$$R_{xx}(0) - \sum_{m=1}^{M} a(m)R_{xx}(m) = \sigma^2 \tag{2}$$

$$R_{xx}(k) - \sum_{m=1}^{M} a(m)R_{xx}(|k-m|) = 0 \tag{3}$$

これらを，まとめて行列表記すると，次のように表せる。

$$\left[\begin{array}{c|cccc} R_0 & R_1 & R_2 & \cdots & R_M \\ \hline R_1 & R_0 & R_1 & \cdots & R_{M-1} \\ R_2 & R_1 & R_0 & \cdots & R_{M-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ R_M & R_{M-1} & R_{M-2} & \cdots & R_0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

ただし，これ以降，$R_{xx}(k) = R_k$ などと簡略的に表記することとする。 この式の 2 行目以降を書き直すと，

$$\begin{bmatrix} R_0 & R_1 & \cdots & R_{M-1} \\ R_1 & R_0 & \cdots & R_{M-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{M-1} & R_{M-2} & \cdots & R_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_M \end{bmatrix} \tag{5}$$

となる。式 (2) , すなわち式 (5) を Yule-Walker 方程式という。その係数行列は，Toeplitz 型と呼ばれる独特の形式を持っており，以下に述べる Levinson-Durbin のアルゴリズムと呼ばれる高速算法が存在する。

＜ Levinson-Durbin のアルゴリズム ＞

このアルゴリズムは，AR 係数を次数方向に漸化的に求めるもので，Yule-Walker 方程式の係数行列が Toeplitz 形式であるがゆえに，M 次 AR モデルの係数が，1つ低次の M-1 次 AR モデルの係数から簡単に求められることを利用するものである。

いま，対象としている時系列に対して，M-1 次 AR モデルが求まっているとしよう。そのときの AR 係数は，式 (4) より，次式を満足する。

$$
\begin{bmatrix} R_0 & R_1 & R_2 & \cdots & R_{M-1} \\ R_1 & R_0 & R_1 & \cdots & R_{M-2} \\ R_2 & R_1 & R_0 & \cdots & R_{M-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{M-1} & R_{M-2} & R_{M-3} & \cdots & R_0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 \\ -a_1{}^{(M-1)} \\ -a_2{}^{(M-1)} \\ \vdots \\ -a_{M-1}{}^{(M-1)} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \sigma_{M-1}{}^2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
\tag{6}
$$

ここで，AR 係数の右肩添字 (M-1) や，予測誤差の分散 σ^2 の下添字 M-1 は，これらが M-1 次の AR モデルのそれらであることを示す。1 行目以降を書き直すと，

$$
\begin{bmatrix} R_0 & R_1 & \cdots & R_{M-2} \\ R_1 & R_0 & \cdots & R_{M-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{M-2} & R_{M-3} & \cdots & R_0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} -a_1{}^{(M-1)} \\ -a_2{}^{(M-1)} \\ \vdots \\ -a_{M-1}{}^{(M-1)} \end{bmatrix}
= -
\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_{M-1} \end{bmatrix}
\tag{7}
$$

が成り立つ。係数行列の Toeplitz 性から式 (7) の行と列を入れ替えても，同じ係数行列に対して，

$$
\begin{bmatrix} R_0 & R_1 & \cdots & R_{M-2} \\ R_1 & R_0 & \cdots & R_{M-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{M-2} & R_{M-3} & \cdots & R_0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} -a_{M-1}{}^{(M-1)} \\ -a_{M-2}{}^{(M-1)} \\ \vdots \\ -a_1{}^{(M-1)} \end{bmatrix}
= -
\begin{bmatrix} R_{M-1} \\ R_{M-2} \\ \vdots \\ R_1 \end{bmatrix}
\tag{7'}
$$

が成り立つ。

さて，これらの式を前提として，M 次の AR 係数を求めることを考えてみよう。解くべき式は式 (4) より，

$$
\left[\begin{array}{c:cccc:c} R_0 & R_1 & R_2 & \cdots & R_{M-1} & R_M \\ \hline R_1 & R_0 & R_1 & \cdots & R_{M-2} & R_{M-1} \\ R_2 & R_1 & R_0 & \cdots & R_{M-3} & R_{M-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ R_{M-1} & R_{M-2} & R_{M-3} & \cdots & R_0 & R_1 \\ \hline R_M & R_{M-1} & R_{M-2} & \cdots & R_1 & R_0 \end{array}\right]
\begin{bmatrix} 1 \\ -a_1{}^{(M)} \\ -a_2{}^{(M)} \\ \vdots \\ -a_{M-1}{}^{(M)} \\ -a_M{}^{(M)} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \sigma_M{}^2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\tag{8}
$$

である。この式の 2 行目から最後の一つ前の行までを書き直すと，

$$
\begin{bmatrix} R_0 & R_1 & \cdots & R_{M-2} \\ R_1 & R_0 & \cdots & R_{M-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{M-2} & R_{M-3} & \cdots & R_0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} -a_1{}^{(M)} \\ -a_2{}^{(M)} \\ \vdots \\ -a_{M-1}{}^{(M)} \end{bmatrix}
= -
\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_{M-1} \end{bmatrix}
+ a_M{}^{(M)}
\begin{bmatrix} R_{M-1} \\ R_{M-2} \\ \vdots \\ R_1 \end{bmatrix}
\tag{9}
$$

となる。この式の右辺の 2 つのベクトルは，それぞれ式 (7) と式 (7') で置き換えることができる。そうすると，どの項も同じ係数行列をもつことになるから，結局，次式が成り立つ。

$$
\begin{bmatrix} -a_1{}^{(M)} \\ -a_2{}^{(M)} \\ \vdots \\ -a_{M-1}{}^{(M)} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} -a_1{}^{(M-1)} \\ -a_2{}^{(M-1)} \\ \vdots \\ -a_{M-1}{}^{(M-1)} \end{bmatrix}
- a_M{}^{(M)}
\begin{bmatrix} -a_{M-1}{}^{(M-1)} \\ -a_{M-2}{}^{(M-1)} \\ \vdots \\ -a_1{}^{(M-1)} \end{bmatrix}
\tag{10}
$$

この式は，M-1 次の AR 係数から，そのつぎの M 次の AR 係数を求める漸化式となっている。集約して書くと，

$$a_j{}^{(M)} = a_j{}^{(M-1)} - a_M{}^{(M)} a_{M-j}{}^{(M-1)} \qquad (j = 1, \cdots, M-1) \qquad (11)$$

となり，ここで未知数なのは $a_M{}^{(M)}$ だけであって，これは偏相関係数（PARCOR 係数）と呼ばれる。また，式（10）の右辺は，AR 係数の正順にその逆順の定数倍を加える形式となっていることから，その係数である $k_M = -a_M{}^{(M)}$ は，反射係数とも呼ばれる。未知の $a_M{}^{(M)}$ を求めるために，解くべき式であった式（4）に式（10）を代入すると，

$$\begin{bmatrix} R_0 & R_1 & \cdots & R_{M-1} & R_M \\ R_1 & R_0 & \cdots & R_{M-2} & R_{M-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ R_{M-1} & R_{M-2} & \cdots & R_0 & R_1 \\ R_M & R_{M-1} & \cdots & R_1 & R_0 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} 1 \\ -a_1{}^{(M-1)} \\ \vdots \\ -a_{M-1}{}^{(M-1)} \\ 0 \end{bmatrix} - a_M{}^{(M)} \begin{bmatrix} 0 \\ -a_{M-1}{}^{(M-1)} \\ \vdots \\ -a_1{}^{(M-1)} \\ 1 \end{bmatrix} \right] \qquad (12)$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{M-1}{}^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ R_M - \sum_{m=1}^{M-1} a_m{}^{(M-1)} R_{M-m} \end{bmatrix} - a_M{}^{(M)} \begin{bmatrix} R_M - \sum_{m=1}^{M-1} a_m{}^{(M-1)} R_{M-m} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sigma_{M-1}{}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_M{}^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

となる。この式の最下段の行から，

$$a_M{}^{(M)} = \left[R_M - \sum_{m=1}^{M-1} a_m{}^{(M-1)} R_{M-m} \right] \Big/ \sigma_{M-1}{}^2 \qquad (13)$$

未知数である $a_M{}^{(M)}$ を求める式が得られる。また，この式と最上段の行から，

$$\sigma_M{}^2 = \sigma_{M-1}{}^2 - a_M{}^{(M)} a_M{}^{(M)} \sigma_{M-1}{}^2 = \sigma_{M-1}{}^2 \left[1 - \left\{ a_M{}^{(M)} \right\}^2 \right] \qquad (14)$$

なる式が得られ, M 次 AR モデルの予測誤差の分散 $\sigma_M{}^2$ を求めることができる。予測誤差の分散 $\sigma_M{}^2$ は常に正であるから，この式から PARCOR 係数は $\left| a_M{}^{(M)} \right| \le 1$ でなければならなず，結果として次数が高くなるにしたがって，予測誤差の分散は確実に小さくなっていくことがわかるい。以上から，Levinson-Durbin のアルゴリズムは，

$$\begin{cases} a_M{}^{(M)} = \left[R_M - \sum_{m=1}^{M-1} a_m{}^{(M-1)} R_{M-m} \right] \Big/ \sigma_{M-1}{}^2 \\ a_j{}^{(M)} = a_j{}^{(M-1)} - a_M{}^{(M)} a_{M-j}{}^{(M-1)} \qquad (j = 1, \cdots, M-1) \\ \sigma_M{}^2 = \sigma_{M-1}{}^2 \left[1 - \left\{ a_M{}^{(M)} \right\}^2 \right] \end{cases} \qquad (15)$$

とまとめることができ，これらの漸化式から，AR パラメータが，モデル次数が低次のものから,一段ずつ順により高次へと求まっていくこととなる。なお，この計算の初期値，すなわち M=1 のときのパラメータ値は，式（6）に戻って，

$$\begin{bmatrix} R_0 & R_1 \\ R_1 & R_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -a_1^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1{}^2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_1^{(1)} = R_1 / R_0 \\ \sigma_1{}^2 = R_0 - R_1{}^2 / R_0 = R_0 \left[1 - \left\{ a_M{}^{(M)} \right\}^2 \right] \end{cases} \qquad (16)$$

で求めてやればよいことになる。

以上