解説： － 荷電粒子の運動（速度と電磁場の相互作用）ー

空間における質点の運動のなかで，電磁場中における荷電粒子の運動は，興味深い例題の一つである。電界によるクーロン力のほかに，速度と磁界との相互作用であるローレンツ力が働くからである。ここでは，その運動について詳しく見ていくことにする。

＜ 荷電粒子に作用する力 ＞

静的な電磁場（電界の強さ $\mathbf{E}$，磁束密度 $\mathbf{B}$ ）のもとで，電荷 q を帯びた粒子に作用する力 $\mathbf{F}$ は，次式で表現できる。

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{1}$$

第１項がクーロン力で，第２項が速度と磁界との外積で表わされるローレンツ力である。これらの力が作用する場合の運動方程式を，デカルト座標系の成分で表記すれば，

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = q\left\{E_x + \left(v_yB_z - v_zB_y\right)\right\} \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = q\left\{E_y + \left(v_zB_x - v_xB_z\right)\right\} \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = q\left\{E_z + \left(v_xB_y - v_yB_x\right)\right\} \end{cases} \tag{2}$$

となる。これらの微分方程式は，相互に関係する項を含んでいるので，このままで解くのは難しい。したがって，運動を決定するためには，座標系をうまく選んで，式をできるだけ簡単にすることが肝要である。

＜ ローレンツ力による運動 ＞

まず，電場がない（$\mathbf{E} = \mathbf{0}$）場合について考えてみよう。いま，$\mathbf{B} = \{0,0,B\}$ となるよう磁場の向きにあわせた座標系をとると，式(2)の運動方程式を速度で書けば，

$$\begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{qB}{m}v_y \\ \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{qB}{m}v_x \\ \dfrac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases} \quad (3) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{d^2v_x}{dt^2} = \left(\dfrac{qB}{m}\right)^2 v_x \\ \dfrac{d^2v_y}{dt^2} = \left(\dfrac{qB}{m}\right)^2 v_y \end{cases} \quad (4)$$

$$v_z = v_{z0}\,, \qquad z = z_0 + v_{z0}t$$

となる。 z 軸方向には静止あるいは等速運動するだけであるから，これ以降，xy 面での運動だけ考えることにする。なお，もとの式(3)が，相互に関係する項を含んだ一階の常微分方程式であるので，それぞれもう一回微分してもとの式を代入し，v_xとv_y についての独立な２階の常微分方程式(4)を得る。

この式は，ふつうの単振動の式なので，その一般解は，$\cos(qB/m\,t)$ と $\sin(qB/m\,t)$ の線形結合からなる。４ つの任意定数のうち， $\cos(qB/m\,t)$ の係数は，初速 $\{v_{x0}\,,\,v_{y0}\}$ を考慮すれば定まって，

$$
\begin{cases} v_x = v_{x0}\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + C_2\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) \\ v_y = v_{y0}\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + C_4\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) \end{cases} \quad (5)
$$

となる。本来の微分方程式(3)が１階であるから，式(5)の残りの任意定数は実際は任意でないはずである。すなわち，式(5)が式(3)を満足しなければならないことから，$C_2 = v_{y0}$，$C_4 = -v_{x0}$であることがわかる。結局，速度は以下のように表わすことができ，

$$
\begin{cases} v_x = v_{x0}\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + v_{y0}\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) \\ v_y = v_{y0}\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) - v_{x0}\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) \end{cases} \quad (6)
$$

さらに，$v_{x0} = v_0\cos\delta$，$v_{y0} = v_0\sin\delta$ と，初速を大きさと方向で表わすことにすれば，

$$
\begin{cases} v_x = v_0\cos\left(-\frac{qB}{m}t + \delta\right) \\ v_y = v_0\sin\left(-\frac{qB}{m}t + \delta\right) \end{cases} \quad (7)
$$

と書けるから，速度の大きさは常に一定で，方向だけが時間とともに右回りに一定の速さで変わることがわかる。つまり，ローレンツ力は，荷電粒子の運動に対して，ただその方向を変えるだけで，速度の大きさを変えるような仕事はしないことがわかる。

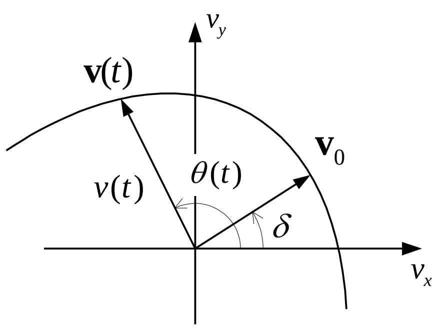

図１ ホドグラフ

速度を大きさと方向で表わす方式（右図のように速度ベクトルの終点の軌跡をホドグラフという）を採用すれば，元の微分方程式は，もっと簡単に解くことができる。いま，xyの２次元のみ考えることとし，速度を$[\,v_x(t),\ v_y(\mathrm{t})\,] = [\,v(t)\cos\{\theta(t)\}\,,\ v(t)\sin\{\theta(t)\}\,]$ と，大きさ$v(t)$と方向$\theta(t)$の関数として表わすと，もとの微分方程式(３)は，

$$
\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv}{dt}\cos\theta - v\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = \quad \frac{qB}{m}v\sin\theta \\ \frac{dv_y}{dt} = \frac{dv}{dt}\sin\theta + v\cos\theta\frac{d\theta}{dt} = -\frac{qB}{m}v\cos\theta \end{cases} \quad (8)
$$

と書ける。この２つの式から式(9)の関係が得られ，初期値 $v(0) = v_0\,, \theta(0) = \delta$ を考慮してこれを解けば，式(10)となるから，式(7)の解が造作もなく得られる。

$$
\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \ 0 \\ \frac{d\theta}{dt} = -\frac{qB}{m} \end{cases} \quad (9) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v = \ v_0 \\ \theta = -\frac{qB}{m}t + \delta \end{cases} \quad (10)
$$

式(7)の速度を積分し，初期位置を原点に $[x(0),\ y(0)\,] = [\,0, 0\,]$ とれば，

$$
\begin{cases} x = \frac{mv_0}{qB}\left[\quad \sin\delta - \sin\left(-\frac{qB}{m}t + \delta\right)\right] \\ y = \frac{mv_0}{qB}\left[-\cos\delta + \cos\left(-\frac{qB}{m}t + \delta\right)\right] \end{cases} \quad (11)
$$

となるから，荷電粒子の軌跡は，xy 面では，図２に示したように，

半径 $\frac{mv_0}{qB}$，中心 $\left[\frac{mv_0}{qB}\sin\delta, \frac{mv_0}{qB}\cos\delta\right]$

の円運動であって，もし，z方向に速度$v_z = v_{z0}$を持てば，全体としての軌跡は，らせんを描くことになる。

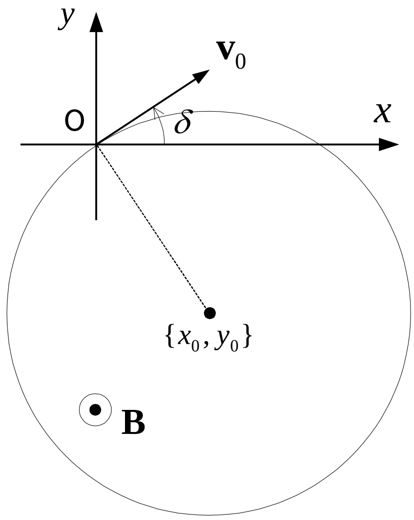

図 2 ローレンツ力による荷電粒子の運動の軌跡

＜ クーロン力とローレンツ力による運動 ＞

つぎに，電場も存在する場合について考えてみよう。いま，座標系は磁場の向きにあわせているから，$\mathbf{B} = \{0,0,B\}$ で，電場も存在する場合，運動方程式は，

$$\begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{q}{m}(E_x + Bv_y) \\ \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{q}{m}(E_y + Bv_x) \\ \dfrac{dv_z}{dt} = \dfrac{q}{m}\ E_z \end{cases} \qquad (12)$$

となる。x, y と z は分離しているから，別々に考えることができる。z 軸方向は，一定の力（クーロン力）の下での加速度運動

$$v_z = v_{z0} + \frac{qE_z}{m}t$$

$$z = z_0 + v_{z0}t + \frac{qE_z}{2m}t^2$$

にすぎないので，あとは xy 面（磁場 $\mathbf{B}$ に垂直な面）での運動だけ考えることにする。式 (12) の上の２つの微分方程式を同時に扱うために，電場 $\mathbf{E}$ を磁場 $\mathbf{B}$ に垂直なベクトル$\mathbf{E}_\perp$と平行なベクトル $\mathbf{E}_\parallel$ に分けて考える。

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\perp + \mathbf{E}_\parallel = \{E_x, E_y, 0\} + \{0,0,E_z\} \qquad (\text{なお，}\mathbf{B} = \{0,0,B\}\ \text{である。})$$

すると，式 (12) の上の２つの微分方程式は，まとめて

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m}(\mathbf{E}_\perp + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \qquad (13)$$

と書ける。なお，ここでは速度も $\mathbf{v} = \{v_x, v_y, 0\}$と，$xy$ 面上（すなわち磁場 $\mathbf{B}$ に垂直な成分）のみで考えている。

さて，いま，速度を

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \frac{\mathbf{E}_\perp \times \mathbf{B}}{\mathrm{B}^2} \qquad (14)$$

とおいてみる。第２項は定ベクトルであって，その方向は，図３のように xy 面内で $\mathbf{E}_\perp$ に垂直な方向である。これを，元の微分方程式(13)に代入すれば，

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \frac{q}{m}\left(\mathbf{E}_\perp + \mathbf{v}' \times \mathbf{B} + \frac{(\mathbf{E}_\perp \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{\mathrm{B}^2}\right) \qquad (15)$$

となり，カッコ内の第 3 項は，大きさが$|\mathbf{E}_\perp|$に等しく，その方向は図のように$\mathbf{E}_\perp$と反対に

なるので，第１項と第３項は相殺されることになる。したがって，

$$\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \frac{q}{m}\mathbf{v}' \times \mathbf{B} \qquad (16)$$

となって，$\mathbf{v}'$については，電場がない（$\mathbf{E} = \mathbf{0}$）場合と同じに考えてよいということになる。電場がない場合，xy 面における荷電粒子は円運動であったから，$\mathbf{v}'$で考えれば，質点は円運動をしているように見えるということである。すなわち，

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{E}_\perp \times \mathbf{B}}{\mathrm{B}^2} \qquad (17)$$

と書けるから，xy 面においては，右辺第２項の速度（ドリフト速度と呼ばれる）で定速移動する座標系で見れば，荷電粒子は円運動をしているように見えるということである。（図３参照）

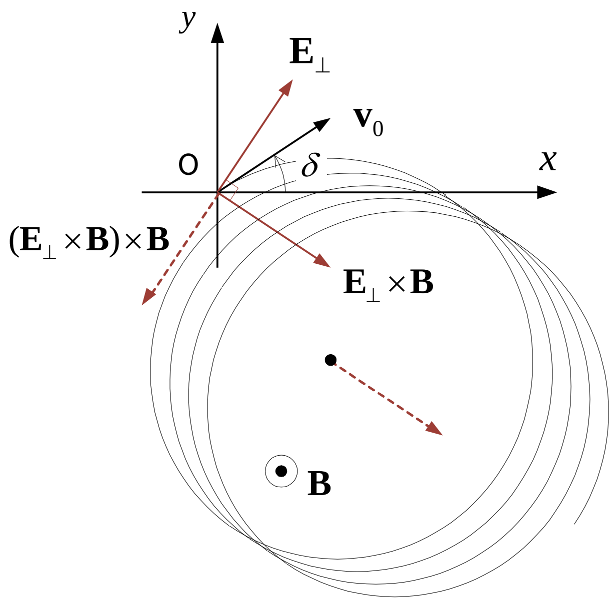

図 3　クーロン力とローレンツ力が
作用するときの荷電粒子の軌跡